ENAC

C. EXT. I.E.E.A.C. (CF et CT) 1981

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
Epreuve à option (programme M)

Durée 4 heures - Coef. 2

Cette épreuve comporte trois parties. Les résultats de la première partie sont nécessaires aux deux autres parties, qui peuvent elles-mêmes être traitées dans un ordre quelconque.

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels.

1ère PARTIE.

1.- a désigne un réel donné positif strictement.

1.1. - Etudier suivant les valeurs de a l'existence de l'intégrale :

$$I_n(a) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos nt}{a - \cos t}\, dt \text{ , où } n \in \mathbb{N} .$$

1.2. - On supposera désormais a strictement supérieur à 1.
Calculer $I_o(a)$ et $I_1(a)$.

1.3. - Exprimer, pour $n \geqslant 2$, $I_n(a) + I_{n-2}(a)$ et en déduire une relation de récurrence entre $I_n(a)$, $I_{n-1}(a)$ et $I_{n-2}(a)$.

1.4. - En déduire, pour n quelconque de $\mathbb{N}$, l'expression de $I_n(a)$ en fonction de n et de a .

On pourra éventuellement utiliser le réel α , strictement positif, défini par : $\mathrm{Ch}\,\alpha = a$.

2. - Montrer que la série dont le premier terme est $\frac{I_o(a)}{2}$ et dont le terme général, pour $n \geqslant 1$, est : $I_n(a) \cos n\theta$, où θ est une variable réelle, est uniformément convergente. Calculer sa somme.

.../...

2ème PARTIE

1. - Soient f_1 et f_2 les fonctions de R dans $\mathbb{R}$ définies par :

$\forall x \in \mathbb{R}$: $f_1(x) = e^{ax} \cos bx$; $f_2(x) = e^{ax} \sin bx$, où a et b sont deux réels donnés, avec $b \neq 0$; e étant la base des logarithmes népériens.

1.1. - Montrer que f_1 et f_2 engendrent un espace vectoriel de fonctions numériques, de dimension 2. On l'appellera E.

1.2. - Montrer que l'application "dérivation", notée : d , définie par :

$\forall f \in E \longmapsto d(f) = f'$, est un endomorphisme de E.

Exprimer la matrice D de d , relativement à la base $\{f_1 , f_2\}$ de E . Peut-on calculer D^{-1} ?

1.3. - En déduire les expressions des deux suites : (u_n) et (v_n) , où

$$u_n = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ax} \cos nx \, dx \quad ; \quad v_n = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ax} \sin nx \, dx$$

1.4. - Calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n$. Les séries de terme général respectivement u_n et v_n sont-elles convergentes ?

2. - Soit $J_n(\rho) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos nt}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos t} \, dt$, où ρ est un réel donné, positif, différent de 0 et différent de 1.

Justifier l'existence de $J_n(\rho)$ et calculer $J_n(\rho)$, en considérant deux cas, selon que ρ est inférieur à 1 ou supérieur à 1.

Calculer $\lim_{n \to +\infty} J_n(\rho)$. La série de terme général $J_n(\rho)$ est-elle convergente ?

.../...

3. - Soit f une fonction deux fois dérivable et de dérivée seconde continue sur $[-\pi , +\pi]$. Soit la suite (K_n) avec : $K_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx$.

Montrer que $\lim_{n \to \infty} K_n = 0$ et que la série de terme général K_n est absolument convergente. Cela permet-il de retrouver certains des résultats du 1.) et du 2.) de cette partie ?

La série de terme général : v_n défini au 1.3., est-elle absolument convergente ?

La série de terme général $\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx$, est-elle en général convergente ? Est-elle en général absolument convergente ?

3ème PARTIE

Soit f la fonction définie pour ρ réel, strictement positif et différent de 1, et θ réel quelconque, par :

$$f(\rho,\theta) = |1 - \rho^2| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 t}{\rho^2 + 1 - 2\rho \cos(t-\theta)} \, dt.$$

1. -

1.1. - Montrer que : si g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T, alors l'intégrale : $\int_{X}^{X+T} g(t) \, dt$ est indépendante de X et que si, de plus, g est une fonction impaire, l'intégrale précédente est nulle.

1.2. - Montrer que $f(\rho,\theta)$ a un sens, et peut être exprimé en fonction de θ et de certaines intégrales $I_n(a)$ de la première partie, pour des valeurs de n et de a (qu'on précisera en fonction de ρ).

.../...

1.3. - En déduire, en distinguant les cas ρ inférieur à 1 ou ρ supérieur à 1, une expression simple de $f(\rho,\theta)$.

2. - On munit le plan affine euclidien d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Un point M du plan aura, dans ce repère, des coordonnées cartésiennes (x, y) ou un système de coordonnées polaires (ρ,θ).

2.1. - Déterminer avec soin l'ensemble des points du plan : $\mathcal{D}$, vérifiant : $\left\{ f(\rho,\theta) \geqslant \frac{3\pi}{2},\ x > 0 \right\}$. On caractérisera de façon détaillée la frontière de $\mathcal{D}$ et on en fera une figure représentative, en indiquant les points intéressants.
— On pourra prendre par exemple 5 cm pour unité de longueur —

2.2. - Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

3. -

3.1. - Démontrer qu'il existe une fonction $\overline{f}$ définie et continue pour ρ et θ réels quelconques, telle que sa restriction à l'ensemble des valeurs de ρ, positives, différentes de 0 et de 1, et θ quelconque, soit $f(\rho,\theta)$.

3.2. - Soit $F(x,y)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $F(x,y) = \overline{f}(\rho,\theta)$. Calculer, en tout point où ρ n'est ni nul, ni égal à 1, la valeur de $\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

3.3. - Calculer l'intégrale double : $\iint_{\mathcal{D}} F(x,y)\, dx\, dy$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail